# DIE BEDEUTUNG DER MATHEMATIK FÜR ENTDECKUNGSREISEN ZU BEGINN DER NEUZEIT

H. K. Kaiser ( Wien )

Sicherlich hat jeder Mathematiker schon einmal die Erfahrung gemacht, daß bei Gesprächen über Mathematik der Gesprächspartner mit stolzem Lächeln erklärt : " Ich verstehe nichts von Mathematik. Ich bin kein mathematisches Talent !"
Warum finden es Menschen, die niemals Bildungslücken aus Geschichte, Geographie, Musik etc. zugeben würden, für chic, ihre Unwissenheit auf dem Gebiet der Mathematik lauthals zu verkünden ?
Warum wird Mathematik nicht als wesentlicher Bestandteil unserer Kultur empfunden ?
Die Gründe dafür sind zahlreich und vielschichtig. Hier seien nur zwei Aspekte des Problems erwähnt. Zum einen wird Mathematik an unseren Schulen fast ausschließlich lösungsorientiert vermittelt. Man lernt also Mathematik zu betreiben, aber nicht über Mathematik zu reden. Das Erlernte ist mit der Umwelt nur schwer kommunizierbar. Zum anderen wird die Bedeutung der Mathematik für die Entwicklung unserer Kultur und Gesellschaft von den Mathematikern selbst verschleiert. Werden nämlich Verfahren zur Lösung von Problemen entwickelt, so versucht der Mathematiker diese in algorithmischer Form darzustellen, sie als Rezept zu formulieren. Der Anwender hat dann lediglich die Anweisungen genau zu befolgen, um zur gewünschten Lösung zu kommen. Er muß das Rezept aber nicht verstehen.

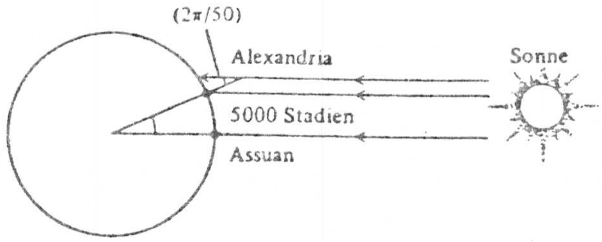
So wie man zur Benützung eines Fernsehers, Autos oder Heimcomputers nur die Bedienungsanleitung kennen und befolgen, nicht aber die Bauart oder Konstruktion des Gerätes beherrschen muß, so verhält es sich auch mit vielen Errungenschaften unserer Kultur, in denen Mathematik nur im " Innenleben " vorkommt.

Eine Möglichkeit, diesen beiden Schwachstellen zu Leibe zu rücken, bietet die Geschichte der Mathematik. Durch sie wird man in die Lage versetzt, über Mathematik zu reden und weiters die Bedeutung der Mathematik für Leistungen unserer Zivilisation und Kultur bewußt zu machen. Dies soll nun am Beispiel der Bedeutung der Mathematik für die Entdeckungsreisen illustriert werden. Dabei sollen drei wesentliche Probleme behandelt werden, bei deren Lösung mathematische Kenntnisse eine Rolle spielen, nämlich :

1. Größe der Erdkugel.
2. Standortbestimmung auf der Erdkugel.
3. Darstellung der Erdkugel (Kartographie).

Versetzen wir uns in die Lage von Kolumbus bei der Planung seiner Reise nach Zipangu (Japan). Zur Berechnung des nötigen Proviants, Wasservorrates etc. war eine ungefähre Vorstellung der Entfernung des Reisezieles notwendig.
Welche Vorstellungen hatte man zu Zeiten des Kolumbus von den Entfernungen auf der Erdkugel ?
Die Griechen hatten bereits die Vorstellung von der Erde als Kugel entwickelt. Ihr Weltbild war bestimmt von der Geometrie. Sonne, Mond und Sterne wurden als physikalische Körper aufgefaßt, die einen festen Abstand zur Erde besitzen. Dieses Modell verwendete Eratosthenes im dritten Jahrhundert vor Christus, um

die Größe der Erdkugel zu schätzen.
Eratosthenes war Bibliothekar in Alexandrien und beobachtete, daß sich in Syene (dem heutigen Assuan) zum Zeitpunkt der Sommersonnenwende zu Mittag die Sonne in einem Brunnen spiegelte, also ein senkrecht in den Boden gesteckter Stab keinen Schatten warf. Zur gleichen Zeit bildeten aber ein senkrecht aufgestellter Stab und die Sonnenstrahlen in Alexandrien einen Winkel von $2\pi/50$. Unter der Annahme der Kugelgestalt der Erde, und daß sich Assuan und Alexandrien auf demselben Längengrad befinden, brauchte man nur noch die Entfernung zwischen Alexandrien und Syene zu bestimmen, um den Erdumfang (und damit den Radius der Erdkugel) zu ermitteln.




Eratosthenes schickte einen Läufer von Alexandrien nach Syene los, der die benötigten Schritte für seinen Marsch zählen mußte.
So gelangte Eratosthenes zur Schätzung von 5 000 Stadien für die Entfernung Alexandrien-Syene. Somit schätzte Eratosthenes den Erdumfang auf 250 000 Stadien. Diese Zahl "rundete" er auf 252 000 Stadien, wahrscheinlich um eine durch 360 teilbare Zahl zu erhalten.
Man glaubt heute, daß die Länge einer Stadie 157,5 Meter beträgt. Damit ergibt sich der erstaunlich gute Schätzwert von 6 316 km für den Erdradius.

Im ersten Jahrhundert vor Christus versuchte Poseidonios, den Erdradius auf ähnliche Weise zu bestimmen. Er beobachtete, daß ein bestimmter Stern (Kanopus) in Rhodos sich kaum sichtbar am

Horizont zeigte, aber von Alexandrien aus maximal unter einem Winkel von $2\pi/48$ über dem Horizont zu sehen war. Durch die Brechungseigenschaften der Erdatmosphäre haftete dieser Methode ein systematischer Fehler an. Durch eine fehlerhafte Schätzung der Entfernung Rhodos - Alexandrien gelangte Poseidonios jedoch zum guten Schätzwert von 38 600 km für den Erdumfang.

Merkwürdigerweise wurde die Schätzung des Eratosthenes im Mittelalter kaum bekannt, Auch das Resultat des Poseidonios wurde nicht richtig überliefert.
Der Geograph Strabo (um die Zeitenwende), der im Mittelalter als große Autorität in geographischen Belangen angesehen wurde, schrieb, daß Poseidonios einen Wert von umgerechnet 28 5oo km für den Erdumfang ermittelt hätte.
Man glaubt heute, daß Strabo die Methode des Poseidonios mit der kleinsten damals gängigen Entfernungsschätzung Rhodos - Alexandrien verwendet hat und so zu dem um etwa 25% zu kleinen Wert gekommen ist. Diesen von Strabo überlieferten Wert hat Kolumbus bei der Planung seiner Reise verwendet.

Ein weiteres großes Problem der Seefahrt über das offene Meer ist die Standortbestimmung. Ein Punkt auf der Erdkugel kann durch Angabe seines Längen-und Breitengrades in einem Bezugssystem angegeben werden. Das Bezugssystem wurde erst relativ spät standardisiert. Der Meridian durch Greenwich wurde erst 1884 als Bezugspunkt für die Angabe der Längengrade allgemein anerkannt.
Um etwa 1500 hatten die Portugiesen eine befriedigende Methode zur Bestimmung des Breitengrades aus der Mittagshöhe der Sonne oder aus der Höhe des Polarsternes entwickelt. Im 15. Jahrhundert setzte unter Heinrich dem Seefahrer in Portugal eine starke

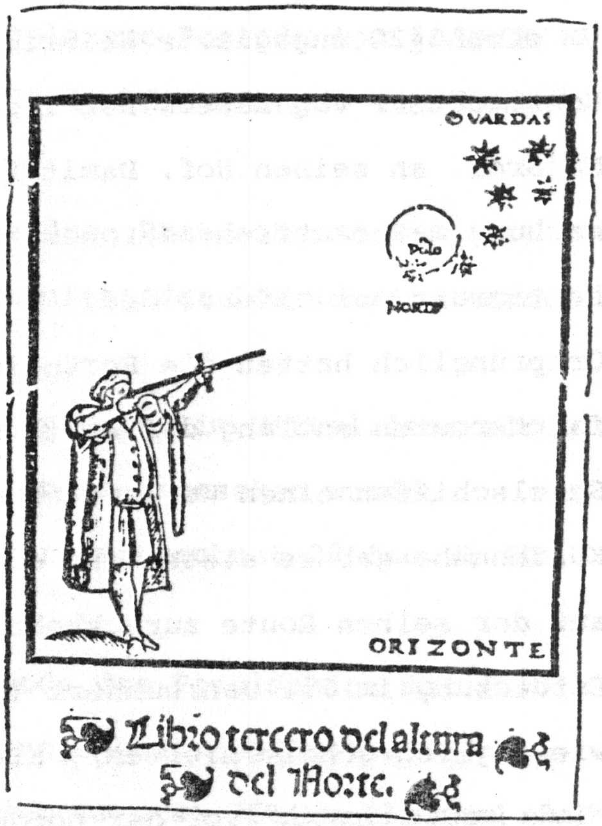
Förderung der Forschung zum Zweck der Verbesserung der Navigationstechniken ein. Dadurch entwickelte sich in Lissabon eine wissenschaftliche Schule, in der Astronomie und Mathematik intensiv betrieben wurde.

Um etwa 1420 engagierte Heinrich den Kartographen, Kosmographen und Konstrukteur von nautischen Instrumenten, Meister Jacome de Maiorca an seinen Hof. Damit begann eine systematische Nutzbarmachung mathematisch-astronomischer Kenntnisse für die Positionsbestimmung auf offener See.

Ursprünglich hatten die Portugiesen bei der Entdeckung der Schifffahrtsrouten entlang der Westküste Afrikas das Problem, mit ihren Segelschiffen einen Weg zurück nach Lissabon zu finden. Denn in Küstennähe gab es stets Wind aus Nordosten, also konnte man nicht auf der selben Route zurückkehren. Es war daher eine wichtige Entdeckung im 15. Jahrhundert (die die Portugiesen auch so lange wie möglich geheim hielten), als man herausfand, daß sich die Winde im Ostatlantik vor der nordwestafrikanischen Küste großräumig im Uhrzeigersinn drehten. Um nach Portugal zurücksegeln zu können, mußte man also nur nach Westen in den freien Ozean segeln, bis man auf günstige Winde stieß, die nach Norden führten. Sodann benötigte man lediglich eine Methode zur Auffindung des Breitengrades von Lissabon, um durch Segeln nach Osten den Hafen zu erreichen. - (Methode des parallelen Segelns). Die einfachste Methode war das Anvisieren des Polarsternes mittels eines Quadranten. Würde der Polarstern genau den Nordpol anzeigen, so wäre die geographische Breite etwa gleich der Höhe des Polarsternes über dem Horizont. Allerdings war der Polarstern damals etwa 3 $1/2^{o}$ vom wirklichen Polarstern entfernt und im Zuge von 24 Stunden änderte der Polarstern - von Lissabon aus betrachtet - seine Höhe um $7^{o}$.

Daher lehrte man die portugiesischen Seefahrer, das Sternbild des kleinen Bären anzuvisieren. (siehe Abbildung aus einem portugiesischen Navigationshandbuch aus dem Jahr 1563).

Da die mathematisch-astronomische Bildung der Seeleute aber nicht allzu groß war, formulierte man die auszuführenden Beobachtungen und Berechnungen in Form von möglichst einprägsamen Merkregeln, wie etwa : "Erscheinen die Hauptsterne des Kleinen Bären in einer Geraden unter dem Westarm des Kleinen Bären, so steht der Polarstern 3 1/2$^0$ über dem Pol."

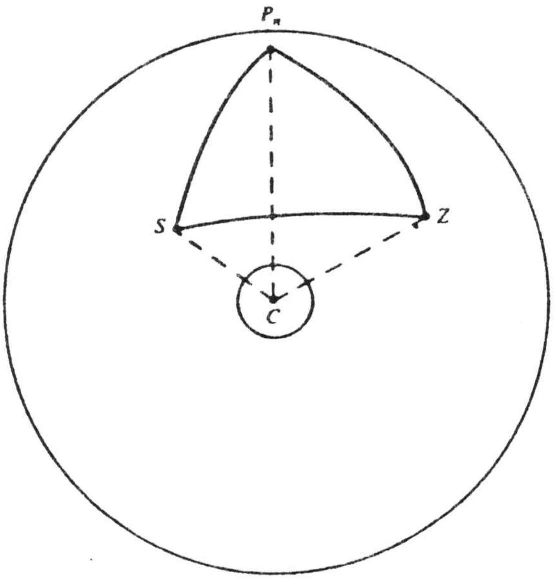


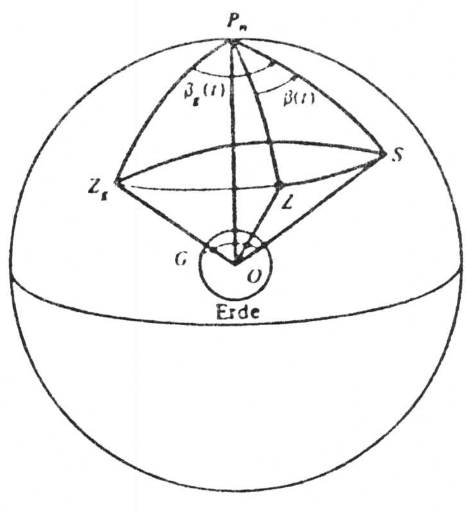
Anvisieren des Kleinen Bären
Pedro de Medina (1563)

Die Methoden zur Bestimmung der geographischen Breite wurden immer weiter verfeinert.
Die Bestimmung der geographischen Länge jedoch gestaltete sich äußerst schwierig und wurde erst im 19. Jahrhundert mit befriedigender Genauigkeit gelöst.Sie hängt eng mit der Bestimmung der Zeit zusammen. Die Lösung des Problems war von eminenter Bedeutung für die Seefahrernationen.
So schreibt Nathaniel Bowditch (1773-1838) in seinem " American Practical Navigator ": "Während des Zeitalters der Entdeckungen boten Spanien und Holland Belohnungen für die Lösung des Problems der Bestimmung der geographischen Länge an, jedoch vergeblich.
Als 2 ooo Mann auf See untergingen, da ein Geschwader der britischen " men-of-war " in einer Nebelnacht des Jahres 1707 auf Grund lief, reichten die Offiziere der königlichen Marine und der Handelsmarine

eine Bittschrift beim Parlament ein. Als Folge wurde 1714 das Amt für geographische Länge gegründet, das beauftragt wurde, diejenige Person zu belohnen, die das Problem, die geographische Länge auf See zu "bestimmen", lösen würde.
Auf einer Seereise nach Westindien und zurück sollten die vorgeschlagenen Methoden geprüft werden, die vernünftig erscheinen. Der Entdecker eines Systems,das die geographische Länge innerhalb von $1^o$ am Ende der Reise bestimmen konnte, sollte £ 10 000 erhalten, für Genauigkeiten innerhalb von 40' den Betrag von £15 000, und innerhalb von 30' , £ 20 000.
Heutzutage wären dies noch interessante Beträge. Damals bedeuteten sie ein Vermögen."

Die Lösung des Längengradproblems beruht auf der Bestimmung bestimmter Dreiecke auf der Himmelskugel.
Unter einem nautischen Dreieck versteht man ein sphärisches Dreieck mit dem Himmelsnordpol $P_n$ Scheitelpunkt, und mit dem Zenit Z des Beobachters und einem bestimmten Himmelskörper S ($\neq Z$, $\neq P_n$) als dem anderen Eckpunkt.



Man sagt, daß man die Seiten des nautischen Dreieckes kennt, wenn die entsprechenden Winkel im Mittelpunkt C (siehe obige Abbildung) der Himmelskugel bekannt sind. Ist die geographische Breite und die Höhe des Sternes S zur festen Zeit $t_o$ bekannt, so kennt man die Seiten des Dreiecks. Denn es liegt der Kreisbogen $P_nZ$ der geographischen Breite des Beobachters gegenüber, der Bogen SZ liegt der Zenitdistanz von S gegenüber, und die Poldistanz $SP_n$ konnte man aus den Jahrbüchern der Astronomen entnehmen.
Bezieht man nun das nautische Dreieck auf den Meridian durch Greenwich (in obiger Abbildung der Großkreis durch $Z_gP_n$) so sieht man, daß sich lediglich die Länge von SZ mit der Tageszeit ändert. Es sind $\beta(t)$ und $\beta_g(t)$ Funktionen der Zeit, aber $\beta_g(t)-\beta(t)$ bleibt bei variierender Zeit konstant. Dieser Wert gibt die Differenz der Länge zwischen dem Punkt O (Beobachter) und G (Greenwich) auf der Erdkugel an. Konnte man also die Tageszeit der Beobachtung genau bestimmen, so war man in der Lage, bei Kenntnis von $\beta_g(t)$ für den Stern S (für markante Sterne wurde $\beta_g(t)$ in den Jahrbüchern vorausberechnet), die geographische Länge durch Messung von $\beta(t)$ zu ermitteln.

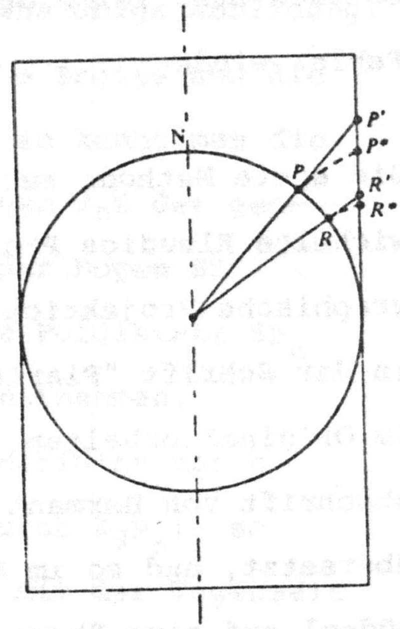
Nun wollen wir noch ein weiteres der Hilfsmittel des Seefahrens besprechen, bei denen die Mathematik eine große Rolle spielt, nämlich die Herstellung von Landkarten. Dabei beschränken wir uns auf die rein mathematischen Probleme der Kartographie.
Stellen wir uns den Erdball als Kugel vor, so liegt das Problem vor, die Oberfläche dieser Kugel (oder einen Teil davon) auf eine (euklidische) Ebene bijektiv abzubilden. Es gibt keine solchen Abbildungen, die zwei der drei wesentlichen Bestimmungsgrößen : Winkel, Fläche, Entfernung invariant lassen. Die für die Praxis wichtigen Konstruktionsmethoden für Landkarten erhalten keine zwei

der drei erwähnten Größen, geben sie alle aber (zumindest für die betrachteten Teile der Erdoberfläche) mit einem hinreichend kleinen Fehler wieder.

Die erste Methode zur Darstellung der Kugel auf eine Ebene entwickelte Klaudios Ptolemaios im 2. Jahrhundert. Sie wird stereographische Projektion genannt. Die Methode wurde von Ptolemaios in der Schrift "Planisphaerium" erläutert. Diese ist uns nicht im Original erhalten. Sie wurde unter Verwendung einer arabischen Abschrift von Hermann von Kärnten im 12. Jahrhundert ins Lateinische übersetzt, und so im Abendland bekannt. Man denkt sich die Kugel im Südpol auf eine Ebene aufgesetzt. Um einen Punkt P der Kugel (ungleich dem Nordpol N) auf der Ebene darzustellen, wählt man den Schnittpunkt P' der Geraden NP mit der Ebene . Man kann zeigen, daß die stereographische Projektion die Winkel erhält.

Im 15. und 16. Jahrhundert wurden dann neue Lösungen für die Kartenherstellung gefunden. Die wichtigste Technik ist jene der Mercatorprojektion. Sie wird auch heute noch verwendet. Ihr Erfinder war Gerard Kremer (1512-1594) , genannt Mercator. Zur Beschreibung der Mercatorprojektion gehen wir aus von der Zylinderprojektion der Kugel. Wir konstruieren einen Zylinder, der eine Kugel mit Mittelpunkt O eingeschrieben hat. Die Achse des Zylinders schneidet die Kugel im Achsennordpol N und im Achsensüdpol. Der Punkt P der Kugel wird durch den Schnittpunkt P' der Geraden OP mit der Zylinderfläche dargestellt. Auf diese Weise erhält man eine bijektive Abbildung zwischen den Punkten der Kugel (ohne Achsennord-und Südpol) und den Punkten der Zylinderfläche.

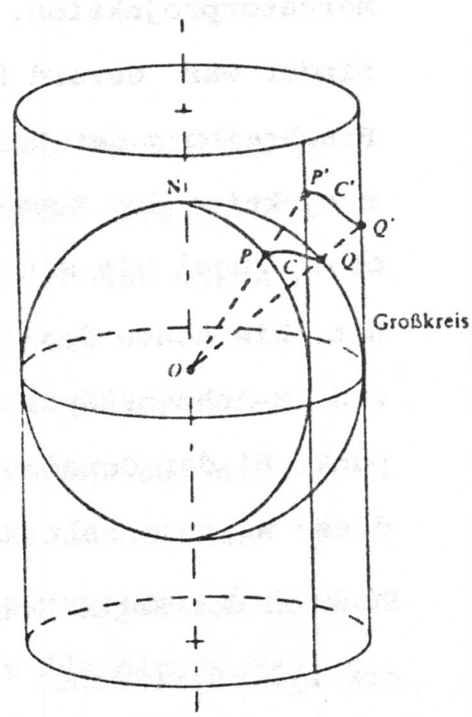
Nun denkt man sich Zylinderfläche aufgeschnitten und aufgerollt. Die so entstehende Karte, gibt in der Nähe des Berührkreises des Zylinders an die Kugel die Kugelfläche befriedigend genau wieder. In der Nähe der Achsenpole wird die Kugelfläche aber immer stärker vergrößert. Die Mercatorprojektion hilft diesem Übelstand ab, indem die Zylinderprojektion zum Berührkreis hin gestaucht wird. Bezeichnen H und V horizontale und vertikale Maßstabsfaktoren,die die Ausmaße der Karte bestimmen,und R den Erdradius,so kann man das Zusammemstauchen so beschreiben:




Ist ein Punkt P durch die geographische Breite α und die geographische Länge β gegeben, so konstruiert man in Ebene den Bildpunkt P* mit den kartesischen Koordinaten (x,y), definiert durch:

$$x = H.R.\beta$$

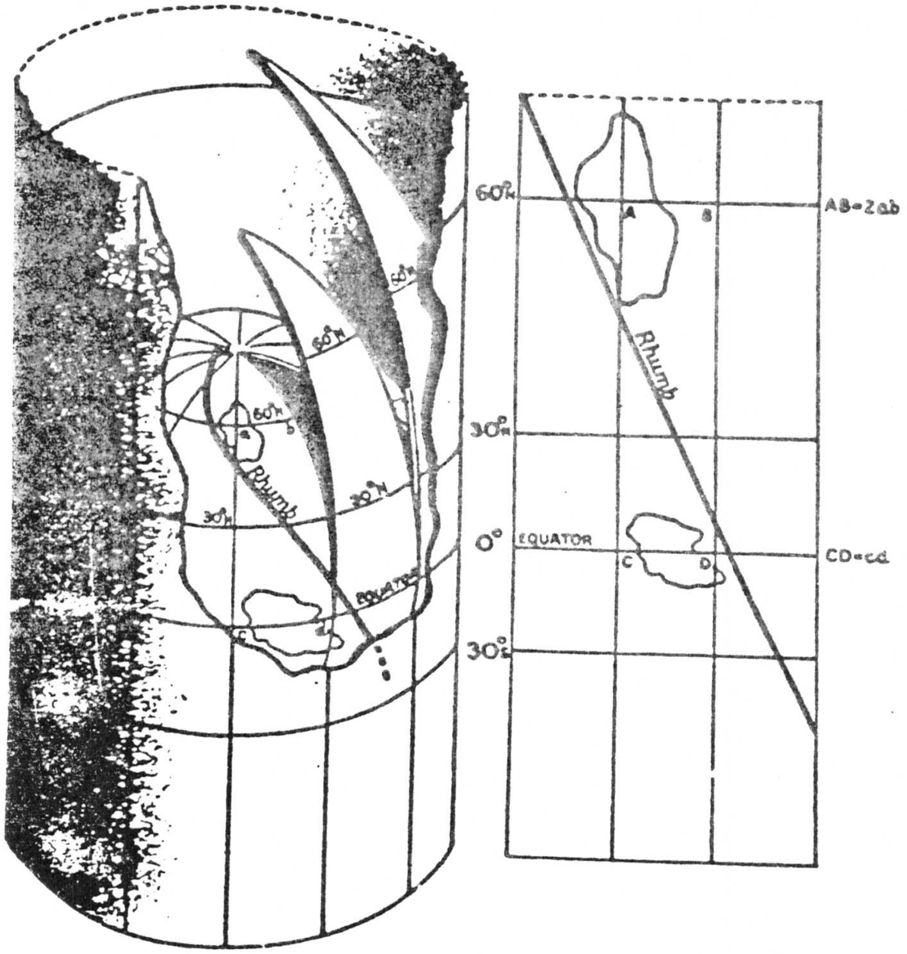
$$y = V.R.\log.\tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$




Die Mercatorprojektion hat zwei für die Praxis wichtigen Eigenschaften. Sie erhält nämlich die Winkel zwischen Kurven und weiters werden alle Kurven auf der Kugel, die mit allen Längengraden einen festen Winkel bilden,als Gerade auf der Karte dargestellt. Die einfachste Art, ein Schiff unter Benützung des Kompaß zu steuern ist, einen festen Winkel mit der Kompaßrichtung einzuhalten. So ein Kurs erscheint also auf der

So ein Kurs erscheint also auf der Mercatorkarte als

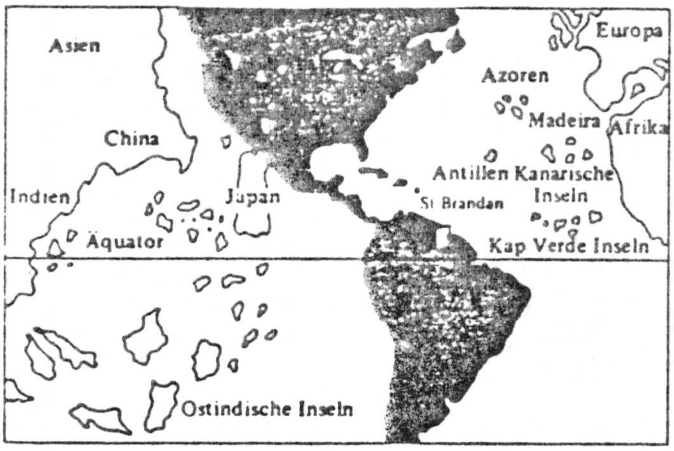
eine Gerade.
Auf der Kugel bildet dieser Kompaßkurs eine spiralförmige Kurve ,die sogenannte Loxodrom.




Erklärung d. Mercatorprojektion n. E. Wright (1599)

Eine ausführliche Darstellung der Bedeutung der Mathematik für die Navigation findet sich in der zitierten Literatur ([2]), [4], [5]).
Kehren wir nun nochmals zur Reise des Kolumbus zurück. Dieser trug seine Pläne am Hof von Johann II in Portugal vor. Die Berater aus der mathematisch-astronomischen Schule meldeten Bedenken zu den Plänen von Kolumbus an, denn dieser schätzte die Entfernung nach Zipangu (Japan) auf etwa 4 8oo km (wahrer Wert 17 7oo km). Man glaubt heute, daß diese Fehleinschätzung aus dem Zusammenspiel mehrer Fehler resultiert (für die Größe des Erdumfanges nahm Kolumbus den um 25% zu kleinen Wert des Poseidonios, er überschätzte die Größe Asiens und die Entfernung Japans vom Festland nach den Schilderungen Marco Polos). Am spanischen Hof, wo es keine mathematisch gebildeten Berater gab, fand Kolumbus ein offenes Ohr. Seine Reise wurde von der spanischen Krone finanziert. Im untenstehenden Bild findet man

Amerika (schraffiert) in die Toscanellikarte eingetragen. Der Entdecker war also nicht überrascht, als er nach etwa 4 8oo km Land sah und war überzeugt die " Westindischen Inseln " gefunden zu haben. Überspitzt formuliert sind also die Mathematiker dafür verantwortlich, daß heute Südamerika mit Ausnahme von Brasilien und Guayana spanisch und nicht portugisisch spricht.




L I T E R A T U R

[ 1 ] H. EVES: An Introduction to the History of Mathematics. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

[ 2 ] E. G. FORBES: The Birth of Navigational Science. Maritime Monographs 10, London, 1974.

[ 3 ] H. KAISER - W. NÖBAUER : Geschichte der Mathematik. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1984 .

[ 4 ] H. L. RESNIKOFF - R. O. WELLS Jr. : Mathematik im Wandel der Kulturen. Vieweg & Sohn, Braunschweig-Wiesbaden, 1983.

[ 5 ] D. W. WATERS: Science and the Techniques of Navigation in the Renaissance. Maritime Monographs 19, London, 1976 .